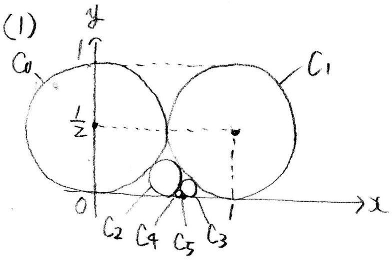
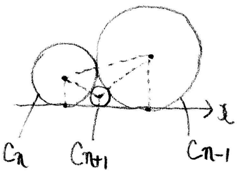
東大理科 1998前期 ③

(1)

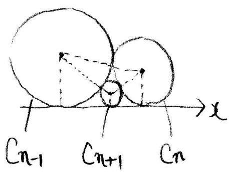


(nが偶数のとき)



↳このとき $x_n-x_{n-1}<0$
$x_{n+1}-x_n>0$
$x_{n+1}-x_{n-1}<0$

(nが奇数のとき)



↳このとき $x_n-x_{n+1}>0$
$x_{n+1}-x_n<0$
$x_{n+1}-x_{n-1}>0$

$(x_n-x_{n-1})^2+(r_n-r_{n-1})^2=(r_n+r_{n-1})^2$ $(x_n-x_{n-1})^2=4r_nr_{n-1}$ $|x_n-x_{n-1}|=2\sqrt{r_nr_{n-1}}$ $x_n-x_{n-1}=-2\sqrt{r_nr_{n-1}}(-1)^n$

$(x_{n+1}-x_n)^2+(r_{n+1}-r_n)^2=(r_{n+1}+r_n)^2$ $(x_{n+1}-x_n)^2=4r_{n+1}r_n$ $|x_{n+1}-x_n|=2\sqrt{r_{n+1}r_n}$ $x_{n+1}-x_n=2\sqrt{r_{n+1}r_n}(-1)^n$

$(x_{n+1}-x_{n-1})^2+(r_{n+1}-r_{n-1})^2=(r_{n+1}+r_{n-1})^2$ $(x_{n+1}-x_{n-1})^2=4r_{n+1}r_{n-1}$ $|x_{n+1}-x_{n-1}|=2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}$ $x_{n+1}-x_{n-1}=-2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}(-1)^n$

$-\cancel{2}\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}\cancel{(-1)^n}=\cancel{2}\sqrt{r_{n+1}r_n}\cancel{(-1)^n}-\cancel{2}\sqrt{r_nr_{n-1}}\cancel{(-1)^n}$ $-\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ $q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$ —①

$q_0=\frac{1}{\sqrt{2r_0}}=1$, $q_1=\frac{1}{\sqrt{2r_1}}=1$ —② ①②より q_nは整数である

(2) $\frac{x_{n-1}-x_n}{\sqrt{2r_n}\sqrt{2r_{n-1}}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{2r_{n+1}}\sqrt{2r_n}}$ $\frac{1}{\sqrt{2r_n}}p_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}p_n=\frac{1}{\sqrt{2r_n}}p_{n+1}-\frac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}p_n$ $p_{n+1}=\sqrt{2r_n}\left(\frac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}\right)p_n+p_{n-1}$

$p_{n+1}=\frac{1}{q_n}(q_{n+1}-q_{n-1})p_n+p_{n-1}$. $p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$ —③ $p_0=\frac{x_0}{\sqrt{2r_0}}=0$, $p_1=\frac{x_1}{\sqrt{2r_1}}=1$ —④ ③④よりp_nも整数である

①②③④より $p_{n+1}=q_n$. よって、p_nとp_{n+1}は互いに素であることを示せばよい。

p_0とp_1は互いに素である —⑤

kをある自然数として、p_{k-1}とp_kは互いに素であると仮定する。

p_kとp_{k+1}はある自然数aにより $p_k=ap_k'$, $p_{k+1}=ap_{k+1}'$ (p_k', p_{k+1}'はある整数)と書けるとすると

$ap_{k+1}'=ap_k'+p_{k-1}$ $p_{k-1}=a(p_{k+1}'-p_k')$ より、$p_{k-1}=ap_{k-1}'$ (p_{k-1}'はある整数)と書けるが

p_{k-1}とp_kは互いに素であるから $a=1$ でなければならない。よって p_kとp_{k+1}も互いに素である —⑥

⑤⑥より数学的帰納法より題意は示された

n≥1のとき

(3) $x_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{q_n}{q_n+q_{n-1}}=\frac{1}{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}=\frac{1}{1+\frac{p_n}{q_n}}=\frac{1}{1+x_n}$ これはn=0のときも成立つ

$|x_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+\alpha}\right|=\left|\frac{1+\alpha-1-x_n}{(1+x_n)(1+\alpha)}\right|=\frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)}|x_n-\alpha|<\frac{1}{1+\alpha}|x_n-\alpha|=\alpha|x_n-\alpha|$

$\alpha^2+\alpha-1=0$. $\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\alpha>0$より $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\alpha<\frac{-1+2.3}{2}=0.65<\frac{2}{3}$ よって $|x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}|x_n-\alpha|$

$|x_n-\alpha|<\frac{2}{3}|x_{n-1}-\alpha|<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^n|x_0-\alpha|=\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$より、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$. $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$