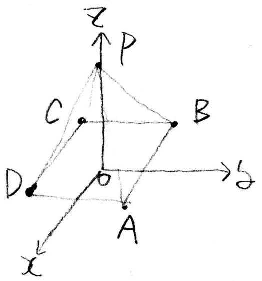
東大理科　1998前期　⑥

$-1\ \ -1\ \ \ 3\ \ -1$
$-1\ \ \ \ 1\ \ \ 3\ \ -1$
$-6\ \ \ \ 0$

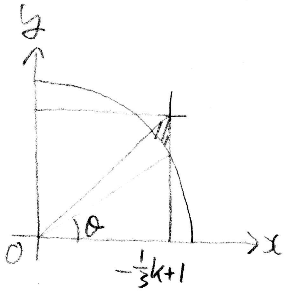


対称性より $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ y\leqq x$ の範囲を考える

四角錐を平面 $z=k$ で切ったときの切り口を考える

$\overrightarrow{AP}=(-1,-1,3)$, $\overrightarrow{DP}=(-1,1,3)$, $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{DP}=(-6,0,-2)$ より

A, D, P を通る平面の方程式は $-6x-2(z-3)=0$. $3x+z-3=0$



$3x+k-3=0$. $x=-\frac{1}{3}k+1$

左図の斜線部を考えればよい。

$0\leqq k\leqq k_0$ のとき斜線部が存在する

左図のように θ をとる

斜線部の面積は $\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{\frac{\pi}{4}-\theta}{2\pi}\pi-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

k が 0 から k_0 まで動くとき、θ は 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで動く。

$\cos\theta=-\frac{1}{3}k+1$ より $k=-3\cos\theta+3$, $\frac{dk}{d\theta}=3\sin\theta$, $dk=3\sin\theta\,d\theta$

求める体積を V とすると、

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right)3\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta\sin\theta-\frac{3}{8}\pi\sin\theta+\frac{3}{2}\theta\sin\theta-\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta$$

ここで $(\cos^3\theta)'=-3\cos^2\theta\sin\theta$, $\cos^2\theta\sin\theta=\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)'$ より $\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=-\frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\sqrt{2}+\frac{1}{3}$

$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sin\theta\,d\theta=\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1$

$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\theta(-\cos\theta)'\,d\theta=\left[-\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}+\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\pi\frac{1}{\sqrt{2}}+\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=-\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi+\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$(\sin^3\theta)'=3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$, $\sin^2\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)'$ より $\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=\frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{1}{8}V=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{12}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{8}\pi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+1\right)+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-\frac{3}{2}\frac{1}{12}\sqrt{2}$$

$$=-\frac{1}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{3}{16}\sqrt{2}\pi}-\frac{3}{8}\pi-\cancel{\frac{3}{16}\sqrt{2}\pi}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{8}\pi$$

$V=4+4\sqrt{2}-3\pi$