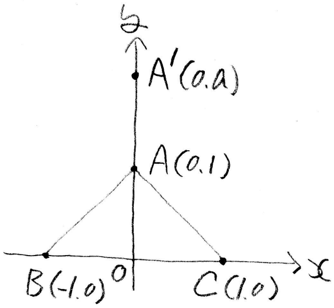
東大理科　2000前期　①



左図のようにABCとA'を取る. $a>0$ とする

$\triangle A'BC$に内接する円は, y軸に垂直な方向に $\frac{1}{a}$ 倍すると

$\triangle ABC$の各辺に接しひとつの軸がBCに平行な楕円になる

円の方程式を $x^2+(y-r)^2=r^2$ とおくと　これは $y=ax+a$ に接するから

xについての2次方程式 $x^2+(ax+a-r)^2=r^2$, $x^2+a^2x^2+a^2+\cancel{r^2}+2a^2x-2arx-2ar=\cancel{r^2}$

$(a^2+1)x^2+2(a^2-ar)x+a^2-2ar=0$ が重解を持ち

$(a^2-ar)^2-(a^2+1)(a^2-2ar)=0$, $\cancel{a^4}-\cancel{2a^3r}+a^2r^2-\cancel{a^4}+\cancel{2a^3r}-a^2+2ar=0$

$ar^2+2r-a=0$　$r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+a^2}}{a}$, $r>0$より $r=\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$

円の面積は $\pi\dfrac{1-2\sqrt{1+a^2}+1+a^2}{a^2}=\pi\dfrac{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}{a^2}$, 楕円の面積は $\pi\dfrac{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}{a^3}$

$f(a)=\dfrac{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}{a^3}$ とおく.

$$f'(a)=\frac{\left(2a-\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}\right)a^3-\left(a^2+2-2\sqrt{a^2+1}\right)3a^2}{a^6}=\frac{2a^2-\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+1}}-3a^2-6+6\sqrt{a^2+1}}{a^4}$$

$$=\frac{(-a^2-6)\sqrt{a^2+1}-2a^2+6(a^2+1)}{a^4\sqrt{a^2+1}}=\frac{4a^2+6-(a^2+6)\sqrt{a^2+1}}{a^4\sqrt{a^2+1}}$$

$f'(a)=0$ のとき. $4a^2+6=(a^2+6)\sqrt{a^2+1}$, $16a^4+48a^2+36=(a^4+12a^2+36)(a^2+1)$

$16a^4+\cancel{48a^2}+\cancel{36}=a^6+a^4+12a^4+\cancel{12a^2}+\cancel{36a^2}+\cancel{36}$, $a^2=3$, $a>0$より $a=\sqrt{3}$

a	…	$\sqrt{3}$	…
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘

$f(a)$の増減表は左表のようになる.

よって楕円の面積の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

$10-7\sqrt{2}$

$22-10\sqrt{5}$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{5-2\cdot2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$