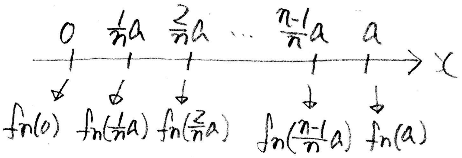
東大理科　2000前期　③



$$\frac{f_n(\frac{k+1}{n}a)-f_n(\frac{k}{n}a)}{\frac{1}{n}a}=\{1-f_n(\frac{k}{n}a)\}f_n(\frac{k+1}{n}a)$$

(1) $p_k=\dfrac{1}{f_n(\frac{k}{n}a)}$, $p_{k+1}=\dfrac{1}{f_n(\frac{k+1}{n}a)}$

$$\frac{\frac{1}{p_{k+1}}-\frac{1}{p_k}}{\frac{1}{n}a}=(1-\frac{1}{p_k})\frac{1}{p_{k+1}}\ ,\quad p_k-p_{k+1}=\frac{1}{n}a(p_k-1)\ ,\quad p_{k+1}=(-\frac{1}{n}a+1)p_k+\frac{1}{n}a$$

$p=(-\frac{1}{n}a+1)p+\frac{1}{n}a$, $p=1$ より　$p_{k+1}-1=(-\frac{1}{n}a+1)(p_k-1)$

$$p_k-1=(-\frac{1}{n}a+1)(p_{k-1}-1)=(-\frac{1}{n}a+1)^2(p_{k-2}-1)=\cdots=(-\frac{1}{n}a+1)^k(p_0-1)$$

$p_0=\dfrac{1}{f_n(0)}=\dfrac{1}{c}$,　$p_k=(-\frac{1}{n}a+1)^k(\frac{1}{c}-1)+1$

(2) $f_n(a)=\dfrac{1}{p_n}=\dfrac{1}{(-\frac{1}{n}a+1)^n(\frac{1}{c}-1)+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^n$ を求める. $m=-\frac{n}{a}$ とおくと　$n\to\infty$ のとき　$m\to-\infty$

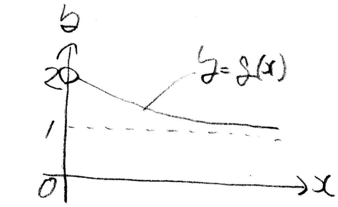
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^n=\lim_{m\to-\infty}\{(1+\frac{1}{m})^m\}^{-a}=\frac{1}{e^a}$$

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=\frac{1}{\frac{1}{e^a}(\frac{1}{c}-1)+1}$$

(3) (i) $c=2$ のとき

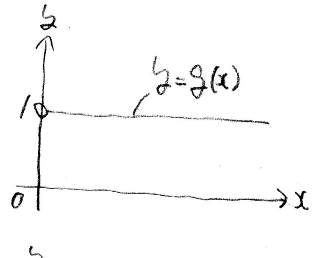
$$g(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2e^x}+1}=\frac{2e^x}{2e^x-1}=\frac{2e^x-1+1}{2e^x-1}=1+\frac{1}{2e^x-1}$$

$g(0)=2$. $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$. $g(x)$ は単調減少. よってグラフは右図のようになる



(ii) $c=1$ のとき

$g(x)=1$. よってグラフは右図のようになる



(iii) $c=\frac{1}{4}$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{\frac{3}{e^x}+1}=\frac{e^x}{e^x+3}=\frac{e^x+3-3}{e^x+3}=1-\frac{3}{e^x+3}$$

$g(0)=\frac{1}{4}$. $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$. $g(x)$ は単調増加. よってグラフは右図のようになる