東大理科 2001前期 ④

(1) $a_1=1$, $a_2=i$, $a_3=1+i$, $a_4=1+2i$

$b_1=\frac{i}{1}=i$, $b_2=\frac{1+i}{i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$, $b_3=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i+2}{1+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

Cは複素数平面上の点 $(0,1)$, $(1,-1)$, $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ を通る

円の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ とおく.

$a^2+(1-b)^2=c^2$, $a^2+b^2-2b+1=c^2$ —①

$(1-a)^2+(-1-b)^2=c^2$, $a^2-2a+1+b^2+2b+1=c^2$, $a^2+b^2-2a+2b+2=c^2$ —②

$(\frac{3}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-b)^2=c^2$, $a^2-3a+\frac{9}{4}+b^2-b+\frac{1}{4}=c^2$, $a^2+b^2-3a-b+\frac{5}{2}=c^2$ —③

①より $c^2-a^2-b^2=-2b+1$

②より $-2a+2b+2=-2b+1$, $2a-4b=1$ —②'

③より $-3a-b+\frac{5}{2}=-2b+1$, $3a-b=\frac{3}{2}$, $6a-2b=3$ —③'

②'③'より
$$\begin{array}{rl} & 6a-12b=3 \\ -) & 6a-2b=3 \\ \hline & -10b=0 \end{array}$$
$b=0$, $a=\frac{1}{2}$, ①より $c^2=\frac{5}{4}$, $c>0$より $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって中心 $\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) (i) b_1はCの周上にある

(ii) ある自然数kに対して b_kはCの周上にあると仮定する.

このとき $|b_k-\frac{1}{2}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ —① が成立つ.

$b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{b_n}$ であるから

$|b_{k+1}-\frac{1}{2}|^2=|\frac{1}{b_k}+\frac{1}{2}|^2=(\frac{1}{b_k}+\frac{1}{2})(\frac{1}{\overline{b_k}}+\frac{1}{2})=\frac{1}{|b_k|^2}+\frac{1}{2b_k}+\frac{1}{2\overline{b_k}}+\frac{1}{4}=\frac{1}{|b_k|^2}+\frac{b_k+\overline{b_k}}{2|b_k|^2}+\frac{1}{4}$

①より $|b_k-\frac{1}{2}|^2=\frac{5}{4}$, $(b_k-\frac{1}{2})(\overline{b_k}-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$, $|b_k|^2-\frac{1}{2}b_k-\frac{1}{2}\overline{b_k}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $b_k+\overline{b_k}=2|b_k|^2-2$ であるから

$|b_{k+1}-\frac{1}{2}|^2=\cancel{\frac{1}{|b_k|^2}}+1-\cancel{\frac{1}{|b_k|^2}}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$|b_{k+1}-\frac{1}{2}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって b_{k+1} もCの周上にある.

(i)(ii)より数学的帰納法により b_nはCの周上にある.