東大理科　2002前期　②

(1) x^{n+1}をx^2-x-1で割った商を$P_n(x)$とおく.

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)P_n(x)+a_nx+b_n$$

$$x^{n+2}=(x^2-x-1)P_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$$

ところで $x^{n+2}=x(x^2-x-1)P_n(x)+a_nx^2+b_nx$

$$=x(x^2-x-1)P_n(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx$$

$$=(x^2-x-1)\{xP_n(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n$$ であるから

$a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_n$

(2) 2整数a, bの最大公約数が1のときa, bは互いに素である.

(i) $x^2=x^2-x-1+x+1$ より $a_1=1$, $b_1=1$ であるから a_1, b_1は正の整数で互いに素である

(ii-i) a_k, b_kは正の整数であると仮定する

$a_{k+1}=a_k+b_k$, $b_{k+1}=a_k$ より a_{k+1}, b_{k+1}は正の整数である

(i), (ii-i)より, 数学的帰納法により, a_n, b_nは正の整数である

(ii-ii) a_k, b_kは互いに素であると仮定する.

αを1以外の正の整数, a'_{k+1}, b'_{k+1}を正の整数として $a_{k+1}=\alpha a'_{k+1}$, $b_{k+1}=\alpha b'_{k+1}$と書けるとすると

$a_k=\alpha b'_{k+1}$　$b_k=\alpha a'_{k+1}-\alpha b'_{k+1}=\alpha(a'_{k+1}-b'_{k+1})$と書ける

これはa_k, b_kが互いに素であることに矛盾する.

よって a_{k+1}, b_{k+1}は互いに素である.

(i) (ii-ii)より, 数学的帰納法により, a_n, b_nは互いに素である.