東大理科　2002前期　⑥

(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\downarrow$

$\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\} \to 1$回

$\downarrow$

$\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\} \to 2$回

$\downarrow$

$\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\} \to 3$回

よって $\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$

(2) $1 \leqq k \leqq N$ のとき $f(k) = 2k$, $f(k) - 2k = 0$　これは $2N+1$ で割り切れる —①

$N+1 \leqq k \leqq 2N$ のとき $f(k) = 2(k-N) - 1 = 2k - 2N - 1$　$f(k) - 2k = -(2N+1)$　これは $2N+1$ で割り切れる —②

①,②より 題意は示された

(3) 数列 $\{1, 2 \cdots 2N\}$ を m 回シャッフルしたときに得られる数列において
数 k が現れる位置を $f_m(k)$ で表す.

$1 \leqq f_m(k) \leqq N$ のとき $f_{m+1}(k) = 2f_m(k)$

$N+1 \leqq f_m(k) \leqq 2N$ のとき $f_{m+1}(k) = 2f_m(k) - (2N+1)$

よって α をある整数として

$f_m(k) = 2^m \cdot k + \alpha(2N+1)$ と書ける

$f_m(k)$ を $2N+1$ で割った余りと $2^m \cdot k$ を $2N+1$ で割った余りは等しく
$1 \leqq f_m(k) \leqq 2N$ より $f_m(k)$ は $2^m \cdot k$ を $2N+1$ で割った余りに等しい

$m = 2n$ のとき $2^{2n} \cdot k = (2^{2n} - 1)k + k = (2 \cdot 2^{n-1} + 1)(2^n - 1)k + k$

$N = 2^{n-1}$ のとき $2^{2n} \cdot k$ を $2N+1$ で割った余りは k であり $f_{2n}(k) = k$

よって 題意は示された