東大理科　2004前期　②

xは任意の自然数を表すとする

(1) 自然数 $n=10x+\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq 9)$ を考える

$n^2=(10x+\alpha)^2=100x^2+20\alpha x+\alpha^2$

α	$20\alpha x+\alpha^2$
0	0 → $a+b$は偶, $b=0$
1	$20x+1$ → $a+b$は奇
2	$40x+4$ → $a+b$は偶, $b=4$
3	$60x+9$ → $a+b$は奇
4	$80x+16=80x+10+6$ → $a+b$は奇
5	$100x+25=100x+20+5$ → $a+b$は奇
6	$120x+36=120x+30+6$ → $a+b$は奇
7	$140x+49=140x+40+9$ → $a+b$は奇
8	$160x+64=160x+60+4$ → $a+b$は偶 $b=4$
9	$180x+81=180x+80+1$ → $a+b$は奇

$0\leqq\alpha\leqq 9$のときの状態は左表のようになるから
$a+b$が偶数となるならば
bは0または4である

(2) (1)より向の条件を満たす数が存在するならば、これは $10000x$ または $10000x+4444$ と表せる

(i) $10000x$と表せる数は明らかに存在する
これは10000で割り切れる

(ii) $10000x+4444$ と表せる数が存在するならば、nをある自然数として $10000x+4444=n^2$と表せる

$n^2=2\cdot 2(2500x+1111)$

$2500x+1111$は平方数でなければならない、これは(1)に矛盾する

よって $10000x+4444$ と表せる数は存在しない

(i)(ii)より題意は示された