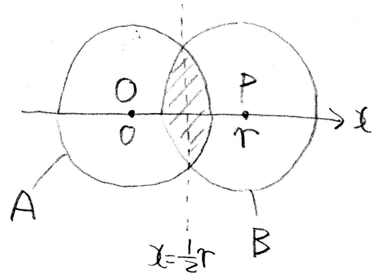
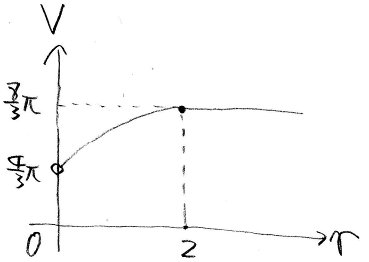
東大理科　2004前期 ⑤





(1) (i) $0<r<2$のとき

左図の斜線部の体積をV'とすると

$$\frac{1}{2}V'=\int_{\frac{1}{2}r}^{1}\pi(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}r}^{1}=\pi\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{24}r^3\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{24}r^3-\frac{1}{2}r+\frac{2}{3}\right)\pi$$

$$V=2\cdot\frac{4}{3}\pi-V'=\frac{8}{3}\pi-\left(\frac{1}{12}r^3-r+\frac{4}{3}\right)\pi=\left(-\frac{1}{12}r^3+r+\frac{4}{3}\right)\pi$$

$V'=\left(-\frac{1}{4}r^2+1\right)\pi>0$, $V''=-\frac{1}{2}r\pi<0$, Vは単調増加で上に凸

(ii) $r\geqq 2$のとき

$$V=2\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$$

(i)(ii)よりグラフは左図のようになる。

(2) $\frac{-r^3+12r+16}{12}\pi=8$, $(-r^3+12r+16)\pi=96$ となるようなrの値を求める。

$r=1$のとき $27\pi<27\times3.15=85.05<96$ であるから $r>1$

$r=1.5$のとき $(-3.375+18+16)\pi=30.625\pi>30.62\times3.14=96.1468>96$ であるから $r<1.5$

$r=1.4$のとき $(-2.744+16.8+16)\pi=30.056\pi<30.06\times3.15=94.689<96$ であるから $r>1.4$

$r=1.45$のとき $(-3.048625+17.4+16)\pi=30.351375\pi<30.36\times3.15=95.634<96$ であるから $r>1.45$

よって、$1.45<r<1.5$ であるから、求めるrの値は 1.5