東大理科 2006前期 ①

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_4}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}$

(1) $P_1(a, \frac{1}{a})$, $P_2(b, \frac{1}{b})$ とする.

$\overrightarrow{OP_3}=(-a+\frac{3b}{2}, -\frac{1}{a}+\frac{3}{2b})$

P_3が $xy=1$ 上にあると仮定すると $\cancel{1}-\frac{3a}{2b}-\frac{3b}{2a}+\frac{9}{4}=\cancel{1}$.

$\frac{b}{a}=c$ とおくと. $-\frac{3}{2c}-\frac{3c}{2}+\frac{9}{4}=0$. $\frac{3}{2}c^2-\frac{9}{4}c+\frac{3}{2}=0$. $c^2-\frac{3}{2}c+1=0$ —①

ここで $\frac{9}{4}-4<0$ であるから①を満たすcは存在しない.

よってP_3は $xy=1$ 上にはない

(2) $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$, $P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)$ とする.

$\overrightarrow{OP_3}=(-\cos\theta+\frac{3}{2}\cos\varphi, -\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\varphi)$

P_3も $x^2+y^2=1$ 上にあるから $\cancel{\cos^2\theta}-3\cos\theta\cos\varphi+\frac{9}{4}\cos^2\varphi+\cancel{\sin^2\theta}-3\sin\theta\sin\varphi+\frac{9}{4}\sin^2\varphi=\cancel{1}$

$3\cos\theta\cos\varphi+3\sin\theta\sin\varphi=\frac{9}{4}$

$\overrightarrow{OP_4}=(-\cos\varphi-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{9}{4}\cos\varphi, -\sin\varphi-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{9}{4}\sin\varphi)=(-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{5}{4}\cos\varphi, -\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{5}{4}\sin\varphi)$

$(-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{5}{4}\cos\varphi)^2+(-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{5}{4}\sin\varphi)^2=\frac{9}{4}\cos^2\theta-\frac{15}{4}\cos\theta\cos\varphi+\frac{25}{16}\cos^2\varphi+\frac{9}{4}\sin^2\theta-\frac{15}{4}\sin\theta\sin\varphi+\frac{25}{16}\sin^2\varphi$

$=-\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}+\frac{61}{16}=1$

よってP_4も $x^2+y^2=1$ 上にある.