東大理科　2006前期 ④

(1) $x=1, y=1$ のとき　$1+1+z^2=z$　$z^2-z+2=0$　$z=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}$

$x=1, y=2$ のとき　$1+4+z^2=2z$　$z^2-2z+5=0$　$z=1\pm\sqrt{1-5}$

$x=1, y=3$ のとき　$1+9+z^2=3z$　$z^2-3z+10=0$　$z=\frac{3\pm\sqrt{9-40}}{2}$

$x=2, y=2$ のとき　$4+4+z^2=4z$　$z^2-4z+8=0$　$z=2\pm\sqrt{4-8}$

$x=2, y=3$ のとき　$4+9+z^2=6z$　$z^2-6z+13=0$　$z=3\pm\sqrt{9-13}$

$x=3, y=3$ のとき　$9+9+z^2=9z$　$z^2-9z+18=0$, $(z-3)(z-6)=0$, $z=3, 6$

以上より　$(3, 3, 3)$, $(3, 3, 6)$

(2) $b^2+c^2+z^2=bcz$ のとき. $z^2-bcz+b^2+c^2=0$.　$z=\frac{bc\pm\sqrt{b^2c^2-4b^2-4c^2}}{2}$

$a^2+b^2+c^2=abc$, $-4b^2-4c^2=4a^2-4abc$ より

$$z=\frac{bc\pm\sqrt{b^2c^2+4a^2-4abc}}{2}=\frac{bc\pm\sqrt{(bc-2a)^2}}{2}=\frac{bc\pm(bc-2a)}{2}=bc-a, a$$

※ $a\leqq b$ より $2a\leqq 2b$, (1)より $c>2$ より $2b<bc$, よって $2a<bc$

$a\leqq c$ より $a+c\leqq 2c$, (1)より $b>2$ より $2c<bc$, よって $a+c<bc$, $bc-a>c$

よって $z=bc-a$ とすればよい.

(3) $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=3 \\ z_1=3 \end{cases}$　$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=z_n \\ z_{n+1}=y_nz_n-x_n \end{cases}$　を満たす数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を考える.

(1)(2)より, (x_n, y_n, z_n) $(n=1, 2, \cdots)$ は条件(A)を満たし, $z_{n+1}>z_n$ であるからすべて異なる値である.

よって題意は示された.