東大理科　2006前期 ⑥

(1) $\left\{\frac{f(x)}{12}\right\}' = \frac{(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-(e^{3x}-3e^{x})2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{3e^{5x}-\cancel{3e^{3x}}-\cancel{3e^{3x}}+3e^{x}-2e^{5x}+\cancel{6e^{3x}}}{(e^{2x}-1)^2}$

$= \frac{e^{5x}+3e^{x}}{(e^{2x}-1)^2} > 0$ であるから、$f(x)$は単調増加 ―①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{12} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}-\frac{3}{e^{x}}}{1-\frac{1}{e^{2x}}} = \infty$ ―②　$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{12} = -\infty$ ―③

①②③より題意は示された。

(2)

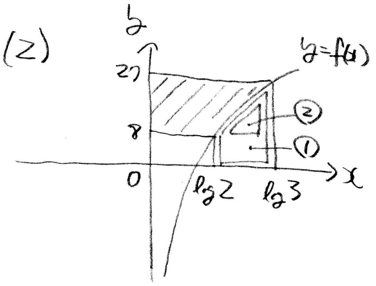

図1

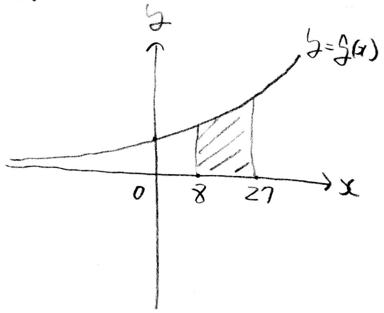

図2

※ $y=g(x)$で
yは、xに対して$f(y)=x$を満たす値

$\int_8^{27} g(x)\,dx$の値は、図2の斜線部の面積に等しく、これは図1の斜線部の面積に等しい。

$f(x)=8$のとき、$\cancel{8}^{2} = \frac{\cancel{12}^{3}(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$, $3e^{3x}-2e^{2x}-9e^{x}+2=0$

$(e^{x}-2)(3e^{2x}+4e^{x}-1)=0$. $e^{x}=2$より $x=\log 2$.

$f(x)=27$のとき、$\cancel{27}^{9} = \frac{\cancel{12}^{4}(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$, $4e^{3x}-9e^{2x}-12e^{x}+9=0$

$(e^{x}-3)(4e^{2x}+3e^{x}-3)=0$. $e^{x}=3$より $x=\log 3$

$$
\begin{array}{r}
3x^2+4x-1 \\
x-2\,)\,\overline{3x^3-2x^2-9x+2} \\
3x^3-6x^2 \\
\hline
4x^2-9x \\
4x^2-8x \\
\hline
-x+2 \\
-x+2 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4x^2+3x-3 \\
x-3\,)\,\overline{4x^3-9x^2-12x+9} \\
4x^3-12x^2 \\
\hline
3x^2-12x \\
3x^2-9x \\
\hline
-3x+9 \\
-3x+9 \\
\hline
0
\end{array}
$$

①の面積は　$12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3x}-3e^{x}}{e^{2x}-1}dx = 12\int_2^3\frac{X^2-3}{X^2-1}dX$

※$e^{x}=X$とおく。$\frac{dX}{dx}=e^{x}$, $\begin{array}{c|c} x & \log 2\to\log 3 \\ \hline X & 2\to 3\end{array}$

$= 12\int_2^3\left(1-\frac{2}{X^2-1}\right)dX = 12\int_2^3\left(1+\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X-1}\right)dX = 12\Big[X+\log(X+1)-\log(X-1)\Big]_2^3$

※ $\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X-1} = \frac{X-1-X-1}{X^2-1} = \frac{-2}{X^2-1}$

$= 12(3+\log 4-\log 2-2-\log 3+\cancel{\log 1}) = 12(1+\log 2-\log 3)$

②の面積は　$12(1+\log 2-\log 3)-(\log 3-\log 2)8 = -20\log 3+20\log 2+12$

$\int_8^{27} g(x)\,dx = 19\log 3+20\log 3-20\log 2-12 = 39\log 3-20\log 2-12$