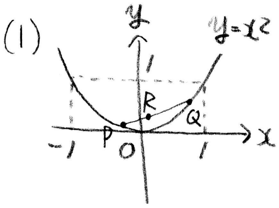
(1)

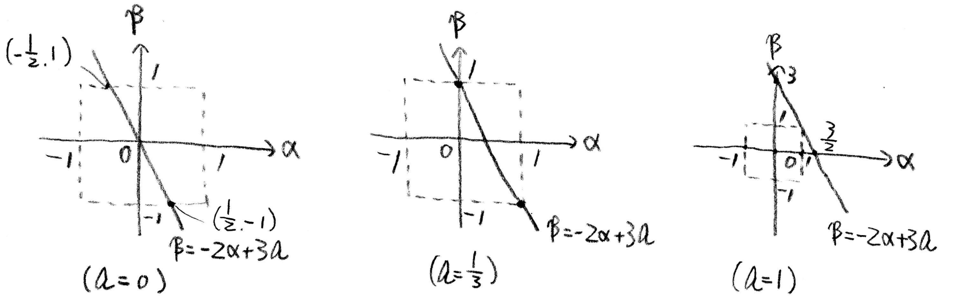


対称性より $0 \leqq a \leqq 1$ のときを考える

$A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ とする

線分ABを1:2に内分する点は $(\alpha, \alpha^2)+\frac{1}{3}(\beta-\alpha, \beta^2-\alpha^2)=\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{2\alpha^2+\beta^2}{3}\right)$

$\frac{2\alpha+\beta}{3}=a$, $\beta=-2\alpha+3a$ であるとする



※ $1=-2\alpha+3a$ のとき $\alpha=\frac{3a-1}{2}$

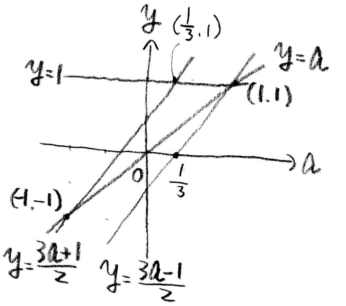
$-1=-2\alpha+3a$ のとき $\alpha=\frac{3a+1}{2}$

上図より $-1 \leqq \alpha \leqq 1$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$ であるのは

$0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき, $\frac{3a-1}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{3a+1}{2}$

$\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき, $\frac{3a-1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$

$$\frac{2\alpha^2+\beta^2}{3}=\frac{2\alpha^2+4\alpha^2-12a\alpha+9a^2}{3}=2\alpha^2-4a\alpha+3a^2=2(\alpha^2-2a\alpha+a^2)+a^2=2(\alpha-a)^2+a^2 \quad \text{—①}$$



左図より①は

$0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき $\alpha=a$ のとき 最小値 a^2

$\alpha=\frac{3a+1}{2}$ のとき 最大値 $2\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)^2+a^2=\frac{1}{2}a^2+a+\frac{1}{2}+a^2$

$=\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき $\alpha=a$ のとき 最小値 a^2

$\alpha=1$ のとき 最大値 $2a^2-4a+2+a^2=3\left(a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}\right)+\frac{2}{3}$

$=3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

以上より

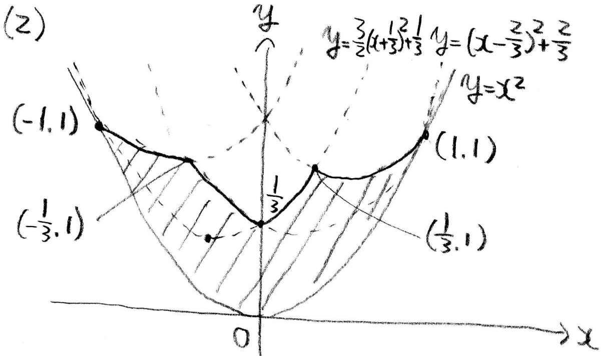
$-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}$ のとき $a^2 \leqq b \leqq 3\left(a+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ のとき $a^2 \leqq b \leqq \frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

$0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき $a^2 \leqq b \leqq \frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき $a^2 \leqq b \leqq 3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

(2)



Dは左図の斜線部である

境界線上の点含む

※ $\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=x^2$, $x^2+2x+1=0$ $(x+1)^2=0$, $x=-1$ より

$y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ と $y=x^2$ は $(-1, 1)$ で接する

$\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=3x^2-4x+2$, $3x^2-10x+3=0$ $x=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm 4}{3}$

$=\frac{1}{3}, 3$ より $y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ と $y=3x^2-4x+2$ は $(\frac{1}{3}, 1)$, $(3, 17)$ で交わる

$3x^2-4x+2=x^2$ $x^2-2x+1=0$ $(x-1)^2=0$ $x=1$ より

$y=3x^2-4x+2$ と $y=x^2$ は $(1, 1)$ で接する