東大文科　2008前期　④

(1) $a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np$ —①　$b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$ —②

$a_1 - \frac{1\cdot(1-1)}{2}p^2 - 1\cdot p = 0$, $b_1 - 1\cdot(1-1)p^2 - 1\cdot p - 1 = 0$ より. $n=1$ のとき ①.② は p^3 で割り切れる —③

kを自然数として. $n=k$ のとき ①.② は p^3 で割り切れると仮定する

$$a_{k+1} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p = a_k + pb_k + \left(-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right)p^2 + (-k-1)p$$

$$= a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp + \left(\cancel{\frac{1}{2}k^2} - \cancel{\frac{1}{2}k}\right)p^2 + \cancel{kp} + p\{b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1\} + (k^2-k)p^3 + \cancel{kp^2} + \cancel{p} + \left(-\cancel{\frac{1}{2}k^2} - \cancel{\frac{1}{2}k}\right)p^2 + (-\cancel{k} - \cancel{1})p$$

$$= a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp + p\{b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1\} + (k^2-k)p^3$$

$$b_{k+1} - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1 = pa_k + (p+1)b_k - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1$$

$$= p\left\{a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp\right\} + \frac{k(k-1)}{2}p^3 + kp^2 + (p+1)\{b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1\} + k(k-1)(p^3+p^2) + k(p^2+p) + \cancel{p} + \cancel{1} + (-k^2-k)p^2 + (-k-\cancel{1})p - \cancel{1}$$

$$= p\left\{a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp\right\} + (p+1)\{b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1\} + \left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + k^2 - k\right)p^3 + (k + \cancel{k^2} - k + k - \cancel{k^2} - k)p^2 + (k-k)p$$

$$= p\left\{a_k - \frac{k(k-1)}{2}p^2 - kp\right\} + (p+1)\{b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1\} + \frac{3}{2}k(k-1)p^3$$

より. $n=k+1$ のときも ①.② は p^3 で割り切れる —④

③.④より数学的帰納法より. ①.② は p^3 で割り切れる

(2) (1)より. $a_p - \frac{p(p-1)}{2}p^2 - p\cdot p = a_p - \frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - p^2$ は p^3 で割り切れるから.

kをある整数として. $a_p - \frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - p^2 = kp^3$. $a_p = \left(\frac{1}{2}p + k - \frac{1}{2}\right)p^3 + p^2$ と書ける.

lをある自然数として. $p = 2l+1$ と書けるから $a_p = \left\{\frac{1}{2}(2l+1) + k - \frac{1}{2}\right\}p^3 + p^2 = (k+l)p^3 + p^2$

よって題意は示された.