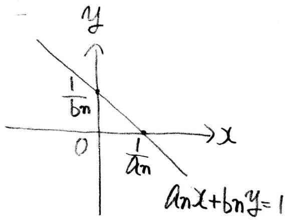
東大理科　2008前期　①

(1) $\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\-2x\end{pmatrix}$ より．fを表す行列は $\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}$



l_nは $\left(\frac{1}{a_n},0\right)$，$\left(0,\frac{1}{b_n}\right)$ を通る．

$\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a_n}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{a_n}\\-\frac{2}{a_n}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{b_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b_n}\\0\end{pmatrix}$ より

l_{n+1}は $\left(\frac{3}{a_n},-\frac{2}{a_n}\right)$，$\left(\frac{1}{b_n},0\right)$ を通るから．

l_{n+1}の方程式は　$y=\dfrac{\frac{2}{a_n}}{\frac{1}{b_n}-\frac{3}{a_n}}\left(x-\frac{1}{b_n}\right)$，$(a_n-3b_n)y=2b_nx-2$

$b_nx+\left(-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n\right)y=1$

よって．$a_{n+1}=b_n$，$b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n$

(2) (1)より．$b_{n+2}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}b_{n+1}$，$2b_{n+2}-3b_{n+1}+b_n=0$．

$2x^2-3x+1=0$．$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=1,\frac{1}{2}$

$b_{n+2}-b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$

$n\geqq1$のとき　$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(b_n-b_{n-1})=\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^n(b_1-b_0)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ —①

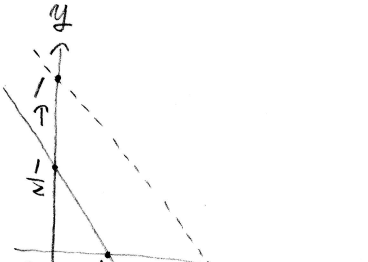
$a_0=3$．$b_0=2$
$a_1=b_0=2$
$b_1=-\frac{1}{2}a_0+\frac{3}{2}b_0=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

$b_{n+2}-\frac{1}{2}b_{n+1}=b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n$

$n\geqq1$のとき．$b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=b_n-\frac{1}{2}b_{n-1}=\cdots=b_1-\frac{1}{2}b_0=\frac{1}{2}$ —②

①，②より $n\geqq1$のとき．$-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}$，$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$　．これは$n=0$のときも成り立つ．

(1)より．$n\geqq1$のとき　$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$　．これは$n=0$のときも成り立つ



l_nとx軸の交点のx座標は $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}$

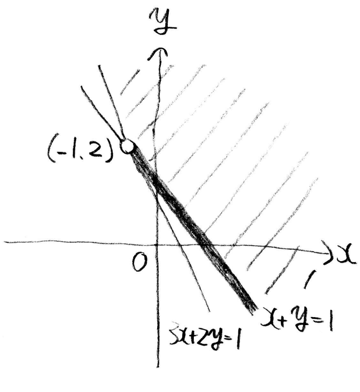
l_nとy軸の交点のy座標は $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+1}$

ここで　$x+y=1$と $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\right\}x+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}y=1$ の交点は

$\left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}x+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}(-x+1)=1$．$\left(\frac{1}{2}\right)^nx=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$x=-1$，$y=2$より

$(-1,2)$であるから

$x+y=1$とl_nは常に$(-1,2)$で交わる．



以上より．求める範囲は左図の斜線部

太線部の境界線上の点含む．