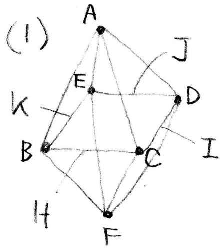
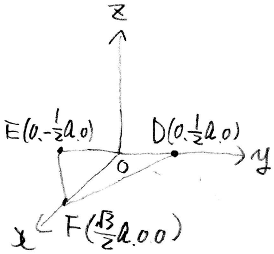
東大理科　2008前期　③

(1)



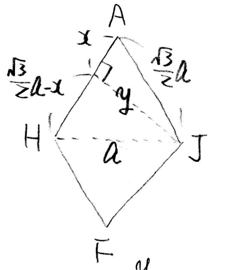


左図のような正八面体ABCDEFを考え、BC, CD, DE, EBの中点をH, I, J, Kとする。

DEFの面を下にする、とする

xy座標で考える

1辺の長さをaとして、D, E, Fの座標を $(0,\frac12 a,0)$, $(0,-\frac12 a,0)$, $(\frac{\sqrt3}{2}a,0,0)$ とする。

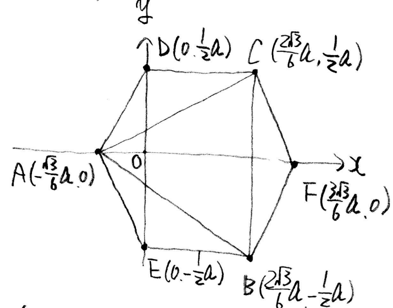


AHFJはひし形であるから AH // FJ

左図のように x, y をとると、$x^2+y^2=\frac34 a^2$, $x^2-\sqrt3 ax+\frac34 a^2+y^2=a^2$

$\frac34 a^2-\sqrt3 ax+\frac34 a^2=a^2$　$\frac12 a^2=\sqrt3 ax$　$x=\frac{\sqrt3}{6}a$, $\frac1{12}a^2+y^2=\frac9{12}a^2$　$y^2=\frac23 a^2$　$y=\frac{\sqrt6}{3}a$

よって、A, B, Cの座標は $(-\frac{\sqrt3}{6}a,0,\frac{\sqrt6}{3}a)$, $(\frac{\sqrt3}{3}a,-\frac12 a,\frac{\sqrt6}{3}a)$, $(\frac{\sqrt3}{3}a,\frac12 a,\frac{\sqrt6}{3}a)$



真上から見た図は左図のようになる

ADCFBEは1辺の長さが $\frac{\sqrt3}{3}a$ の正六角形

(2) $a=1$ として考える。

ABCの面とDEFの面は互いに平行であり、G_1, G_2 の座標は $(\frac{\sqrt3}{6},0,\frac{\sqrt6}{3})$, $(\frac{\sqrt3}{6},0,0)$

上図を平面 $z=z$ で切ったとき、G_1G_2 を通る直線と平面 $z=z$ が交わる点 $(\frac{\sqrt3}{6},0,z)$ から最も遠い点の1つは、直線ADと平面 $z=z$ の交点である

直線ADの方程式は $(-\frac{\sqrt3}{6},0,\frac{\sqrt6}{3})+t(\frac{\sqrt3}{6},\frac12,-\frac{\sqrt6}{3})=(\frac{\sqrt3}{6}t-\frac{\sqrt3}{6},\frac12 t,-\frac{\sqrt6}{3}t+\frac{\sqrt6}{3})$

これと平面 $z=z$ の交点は $-\frac{\sqrt6}{3}t+\frac{\sqrt6}{3}=z$, $t=-\frac{\sqrt6}{2}z+1$ より

$(\frac{\sqrt3}{6}(-\frac{\sqrt6}{2}z+1)-\frac{\sqrt3}{6},\frac12(-\frac{\sqrt6}{2}z+1),z)=(-\frac{\sqrt2}{4}z,-\frac{\sqrt6}{4}z+\frac12,z)$

これと $(\frac{\sqrt3}{6},0,z)$ の距離の2乗は $(-\frac{\sqrt2}{4}z-\frac{\sqrt3}{6})^2+\frac38 z^2-\frac{\sqrt6}{4}z+\frac14=\frac18 z^2+\frac{\sqrt6}{12}z+\frac1{12}+\frac38 z^2-\frac{\sqrt6}{4}z+\frac14=\frac12 z^2-\frac{\sqrt6}{6}z+\frac13$

よって求める体積は $\pi\int_0^{\frac{\sqrt6}{3}}(\frac12 z^2-\frac{\sqrt6}{6}z+\frac13)dz=\pi\left[\frac16 z^3-\frac{\sqrt6}{12}z^2+\frac13 z\right]_0^{\frac{\sqrt6}{3}}=\pi(\frac16\cdot\frac{6\sqrt6}{27}-\frac{\sqrt6}{12}\cdot\frac69+\frac13\cdot\frac{\sqrt6}{3})$

$=(\frac1{27}-\frac1{18}+\frac19)\sqrt6\pi=\frac{2-3+6}{54}\sqrt6\pi=\frac5{54}\sqrt6\pi$