東大理科　2008前期 ⑤

(1) $\boxed{3^0}=1$ は $3^0=1$ で割り切れるが，$3^{0+1}=3$ では割り切れない ―①

kを任意の自然数として，$\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが 3^{k+1} では割り切れないと仮定すると，

$\boxed{3^k}=3^k\cdot\alpha$ を満たす，3の倍数ではない自然数 α が存在する ―②

$$\boxed{3^{k+1}}=\overbrace{111\cdots111}^{3^{k+1}個}=\overbrace{111\cdots111}^{3^k個}\overbrace{000\cdots000}^{2\cdot3^k個}+\overbrace{111\cdots111}^{3^k個}\overbrace{000\cdots000}^{3^k個}+\overbrace{111\cdots111}^{3^k個}$$

$$=10^{2\cdot3^k}\cdot\boxed{3^k}+10^{3^k}\cdot\boxed{3^k}+3^k=\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}\boxed{3^k}$$

ここで $\dfrac{10^{3^k}-1}{9}=\boxed{3^k}$，$10^{3^k}=9\cdot\boxed{3^k}+1$ より

$$\boxed{3^{k+1}}=(81\cdot\boxed{3^k}^2+18\cdot\boxed{3^k}+1+9\cdot\boxed{3^k}+1+1)\boxed{3^k}=(81\cdot\boxed{3^k}^2+27\cdot\boxed{3^k}+3)\boxed{3^k}$$

②より，$\boxed{3^{k+1}}=3^{k+1}\cdot\alpha(27\boxed{3^k}^2+9\cdot\boxed{3^k}+1)$ より，$\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れるが 3^{k+2} では割り切れない ―③

①③より数学的帰納法より，題意は示された．

(2) (1)より $\boxed{27}$ は27で割り切れる ―④

kを任意の自然数として，$\boxed{27k}$ は27で割り切れると仮定すると，$\boxed{27k}=27\alpha$ を満たす自然数 α が存在するから

$$\boxed{27(k+1)}=\overbrace{111\cdots111}^{27k個}\overbrace{000\cdots000}^{27個}+\overbrace{111\cdots111}^{27個}=10^{27}\cdot\boxed{27k}+\boxed{27}=27\alpha\cdot10^{27}+\boxed{27}$$ と④より

$\boxed{27(k+1)}$ も27で割り切れる ―⑤

④⑤より数学的帰納法より，nが27で割り切れるとき，$\boxed{n}$ が27で割り切れる ―⑥

α を0より大きい整数とする

nが27で割り切れないとき $\boxed{n}=27\alpha+\boxed{l}$ $(l=1,2,\cdots26)$ と書ける

$\boxed{3}$ は3で割り切れる

$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{10}\boxed{13}\boxed{16}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{25}$ は $3\alpha+1$ と書けるから，3で割り切れない

$\boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{11}\boxed{14}\boxed{17}\boxed{20}\boxed{23}\boxed{26}$ は $3\alpha+11$ と書けるから，3で割り切れない

$\boxed{3}$ は9で割り切れない

$\boxed{6}=10^3\cdot\boxed{3}+\boxed{3}=1001\cdot\boxed{3}$ は9で割り切れない

$\boxed{9}$ は9で割り切れ，$\boxed{3}\boxed{6}$ は9で割り切れない

$\boxed{12}\boxed{21}$ は $9\alpha+\boxed{3}$ と書けるから 9で割り切れない

$\boxed{15}\boxed{24}$ は $9\alpha+\boxed{6}$ と書けるから 9で割り切れない

$\boxed{9}$ は27で割り切れない

$\boxed{18}=10^9\cdot\boxed{9}+\boxed{9}=1000000001\cdot\boxed{9}$ は27で割り切れない．

以上より，$\boxed{n}$ が27で割り切れるとき，nが27で割り切れる ―⑦

⑥⑦より，題意は示された

$1001 \div 3$：商 333，余り 2

$1000000001 \div 3$：商 333333333，余り 2