東大理科　2009前期 ①　, 東大文科　2009前期 ②

(1) $n=2,3 \cdots m-1$ のとき

$${}_{m-1}C_{n-1}=\frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}=\frac{\frac{m!}{m}}{(m-n)!\frac{n!}{n}}=\frac{n}{m}{}_mC_n$$

ここで ${}_{m-1}C_{n-1}$ は自然数, m は素数, $n<m$ より ${}_mC_n$ は m で割り切れる —①

${}_mC_1=m$ —②

①②より題意は示された

(2) $1^m-1=0$ は d_m で割り切れる —③

n は1より大きい自然数として, n^m-n は d_m で割り切れると仮定する

$$(n+1)^m-(n+1)=\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r n^r-n-1=\cancel{1}+\sum_{r=1}^{m-1}{}_mC_r n^r+n^m-n-\cancel{1}$$

仮定より n^m-n は d_m で割り切れ, (1)より ${}_mC_1, {}_mC_2 \cdots {}_mC_{m-1}$ は d_m で割り切れるから

$(n+1)^m-(n+1)$ も d_m で割り切れる —④

③④より題意は示された.　　　　—e 文科はここまで

(3) $m=2l$ ($l=2,3\cdots$) のとき

$$k^{2l}-k=k(k^{2l-1}-1)=k(k-1)(1+k+k^2+\cdots+k^{2l-2})=k(k-1)\{(1+k)(1+k^2+k^4+\cdots+k^{2l-4})+k^{2l-2}\}$$

$$=(k-1)k(k+1)(1+k^2+k^4+\cdots+k^{2l-4})+(k-1)k\{(k+1)-1\}^{2l-2}$$

$$=(k-1)k(k+1)(1+k^2+k^4+\cdots+k^{2l-4})+(k-1)k\{(k+1)-1\}\{1+(k+1)+(k+1)^2+\cdots+(k+1)^{2l-3}\}$$

$$=(k-1)k(k+1)\{1+k^2+k^4+\cdots+k^{2l-4}+k+k(k+1)+k(k+1)^2+\cdots+k(k+1)^{2l-4}\}+(k-1)k^2$$

ここで $(k-1)k^2=(k-1)\{(k-1)(k+1)+1\}=(k-1)^2(k+1)+k-1$

よって $k\geqq 2$ のとき $k^{2l}-k$ を $k+1$ で割ると $k-1$ 余る

つまり $2^{2l}-2$ は 3 で割り切れない

$3^{2l}-3$ は 4 〃

⋮

$k^{2l}-k$ は $k+1$ 〃　から すべての自然数 k に対し, $k^{2l}-k$ を割り切る可能性のある数は 1, 2 に限られる —⑤

⋮

$2^2-2=2$, $3^2-3=6$ より すべての自然数 k に対し k^2-k を割り切る可能性のある数は 1, 2 に限られる —⑥

(2)より d_m は, すべての自然数 k に対し k^m-k を割り切る数であるから

⑤⑥より題意は示された