東大理科　2009前期 ③

(1) 赤をr, 青をb, 黄をy, 白をwと書く.

Lに4色すべての玉が入っているには, r, b, y, wがすべて少なくとも1回出ればよい.

操作(A)を5回おこなったときのすべての場合の数は 4^5

rが2回, b, y, wが1回出る場合の数は $\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3$

bが2回, yが2回, wが2回出る場合の数も同様

よってLに4色すべての玉が入っている確率は $\frac{5\cdot4^2\cdot3}{4^5}=\frac{3\cdot5}{4^3}$

Rに4色すべての玉が入っている確率も同様

ゆえに $P_1=\frac{3\cdot5}{4^3}\cdot\frac{3\cdot5}{4^3}=\frac{3^2\cdot5^2}{4^6}=\frac{225}{4096}$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times 9 \\ \hline 225 \end{array}$$

(2) r, b, y, wがすべて少なくとも1回出ればよい

よって(1)より $P_2=\frac{5\cdot4^2\cdot3}{4^5}=\frac{15}{64}$

(3) LにもRにも4色すべての玉が入っているには, r, b, y, wがすべて少なくとも2回出ればよい

操作(C)を10回おこなったときのすべての場合の数は 4^{10}

rが4回, b, y, wが2回出る場合の数は $\frac{10!}{4!2!2!2!}=10\cdot9\cdot7\cdot6\cdot5=2\cdot5\cdot3^2\cdot7\cdot2\cdot3\cdot5=3^3\cdot4\cdot5^2\cdot7$

bが4回, yが4回, wが4回出る場合の数も同様

r, bが3回, y, wが2回出る場合の数は $\frac{10!}{3!3!2!2!}=\frac{10\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot5\cdot4}{\cancel{8}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=2\cdot5\cdot3^2\cdot7\cdot2\cdot5\cdot4=3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot7$

r, yが3回, r, wが3回, b, yが3回, b, wが3回, y, wが3回出る場合の数も同様

よって $P_3=\frac{3^3\cdot\cancel{4^2}\cdot5^2\cdot7+2\cdot3^3\cdot\cancel{4^2}\cdot5^2\cdot7}{4^{\cancel{10}\,8}}=\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}$

ゆえに $\frac{P_3}{P_1}=\frac{\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}}{\frac{3^2\cdot5^2}{4^6}}=\frac{\overset{2}{\cancel{3^4}}\cdot\cancel{5^2}\cdot7}{\cancel{4^8}\,4^2}\cdot\frac{\cancel{4^6}}{\cancel{3^2}\cdot\cancel{5^2}}=\frac{63}{16}$