

(1) $(1-x)^{\frac{1}{1-x}} > 0, (1+x)^{\frac{1}{1+x}} > 0$ より 5式は

$$(1-\frac{1}{x}) \log(1-x) < \frac{1}{x} \log(1+x) \quad \log(1-x) < \frac{1}{x} \log(1-x^2)$$

$\begin{cases} -1 < x < 0 \text{ のとき } x \log(1-x) > \log(1-x^2) \\ 0 < x < 1 \text{ のとき } x \log(1-x) < \log(1-x^2) \end{cases}$ — ① と変形できる

$$f(x) = x \log(1-x) - \log(1-x^2) \quad (-1 < x < 1) \text{ とする}$$

$$f'(x) = \log(1-x) + x \frac{-1}{1-x} - \frac{-2x}{1-x^2} = \log(1-x) + \frac{-x-x^2+2x}{1-x^2} = \log(1-x) + \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \log(1-x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-(1+x)^2 + 1-x}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-1-2x-x^2+1-x}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-x(x+2)}{(1-x)(1+x)^2}$$

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			↗	0	↘

$f(x)$ の増減表は左表
よって $f(x) \leq 0$. 等号は $x=0$ のとき成り立つ

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$			-	0	-
$f(x)$			↘	0	↘

$f(x)$ の増減表は左表
よって $-1 < x < 0$ のとき $f(x) > 0, x \log(1-x) > \log(1-x^2)$
 $0 < x < 1$ のとき $f(x) < 0, x \log(1-x) < \log(1-x^2)$ } ②

①②より 題意は示された

(2) 5式は $(1-\frac{1}{1000})^{101} < 1-\frac{1}{100} < (1-\frac{1}{1000})^{100}, (1+\frac{1}{100})^{101} (1-\frac{1}{100})^{101} < 1-\frac{1}{100} < (1+\frac{1}{100})^{100} (1-\frac{1}{100})^{100}$ と変形できる

$$(1+\frac{1}{100})^{101} (1-\frac{1}{100})^{101} < 1-\frac{1}{100} \text{ が成り立つとき } (1+\frac{1}{100})^{101} (1-\frac{1}{100})^{100} < 1 \quad \text{--- ③}$$

$$1-\frac{1}{100} < (1+\frac{1}{100})^{100} (1-\frac{1}{100})^{100} \text{ が成り立つとき } 1 < (1+\frac{1}{100})^{100} (1-\frac{1}{100})^{99} \quad \text{--- ④}$$

$$(1) \text{ に } x = \frac{1}{100} \text{ とすれば } (1-\frac{1}{100})^{1-100} < (1+\frac{1}{100})^{100} \quad 1 < (1+\frac{1}{100})^{100} (1-\frac{1}{100})^{99} \quad \text{--- ⑤}$$

$$(1) \text{ に } x = -\frac{1}{100} \text{ とすれば } (1+\frac{1}{100})^{1+100} < (1-\frac{1}{100})^{-100} \quad (1+\frac{1}{100})^{101} (1-\frac{1}{100})^{100} < 1 \quad \text{--- ⑥}$$

③~⑥より 題意は示された