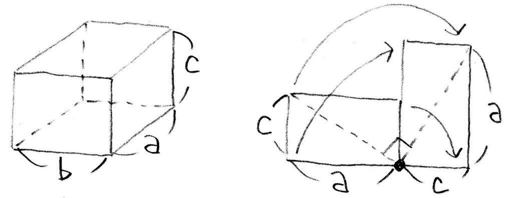
東大理科　2010前期 ①

(1)



Vの体積をvとする

左図より $v=\{ac+\frac{1}{4}\pi(a^2+c^2)\}b$

$=abc+\frac{1}{4}(a^2+c^2)b\pi$

(2) $v=abc+\frac{1}{4}\{(a+c)^2-2ac\}b\pi=abc+\frac{1}{4}(b^2-2b+1)b\pi-\frac{1}{2}abc\pi=(-\frac{1}{2}\pi+1)abc+\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)\pi$ —①

まずbの値を固定して考える

相加平均≧相乗平均より $\frac{a+c}{2}\geqq\sqrt{ac}$, $\frac{(a+c)^2}{4}\geqq ac$, $\frac{b^2-2b+1}{4}\geqq ac$ であり

等号は $a=c$ のとき成り立つから，$0<ac\leqq\frac{b^2-2b+1}{4}$

①より $(-\frac{1}{2}\pi+1)\frac{b^3-2b^2+b}{4}+\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)\pi\leqq v<\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)\pi$

$\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)(\frac{\pi}{2}+1)\leqq v<\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)\pi$ —②

$f(x)=x^3-2x^2+x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を考えると $f'(x)=3x^2-4x+1$, $f'(x)=0$のとき $x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3}=\frac{1}{3}, 1$

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$f'(x)$	+	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

$f(x)$の増減表は左表 —③

※ $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1-6+9}{27}=\frac{4}{27}$

bの値を $0<b<1$ の範囲で動かすと ③より

$\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)(\frac{\pi}{2}+1)>0$, $\frac{1}{4}(b^3-2b^2+b)\pi\leqq\frac{1}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{27}\pi$

②より $0<v<\frac{\pi}{27}$