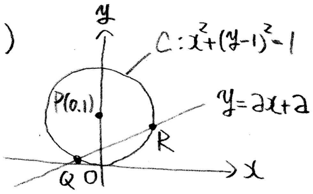
東大理科　2011前期　①

(1)



$\angle QPR=\theta$ とすると $S(a)=\frac{1}{2}\sin\theta$

$QR=l$ とすると 余弦定理より $l^2=1+1-2\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{-l^2+2}{2}$

$S(a)^2=\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{l^4-4l^2+4}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{16}l^4+\frac{1}{4}l^2$ —①

Q, Rの座標は $(\alpha, a\alpha+a)$, $(\beta, a\beta+a)$ と書ける

$x^2+(ax+a-1)^2=1$, $x^2+a^2x^2+2a(a-1)x+a^2-2a+1=1$, $(a^2+1)x^2+(2a^2-2a)x+a^2-2a=0$

の異なる2つの実数解が α, β であるから 解と係数の関係より $\alpha+\beta=\frac{-2a^2+2a}{a^2+1}$　$\alpha\beta=\frac{a^2-2a}{a^2+1}$

$l^2=(\beta-\alpha)^2+(a\beta-a\alpha)^2=(a^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\frac{4a^4-8a^3+4a^2}{a^2+1}-4a^2+8a$

$=\frac{4a^4-8a^3+4a^2+(a^2+1)(-4a^2+8a)}{a^2+1}=\frac{\cancel{4a^4}\cancel{-8a^3}\cancel{+4a^2}\cancel{-4a^4}\cancel{+8a^3}\cancel{-4a^2}+8a}{a^2+1}=\frac{8a}{a^2+1}$

①より $S(a)^2=-\frac{1}{\cancel{16}_{\,}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{64}}a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}a}{a^2+1}=\frac{-4a^2+2a(a^2+1)}{(a^2+1)^2}=\frac{2a(a^2-2a+1)}{(a^2+1)^2}=\frac{2a(a-1)^2}{(a^2+1)^2}$　$S(a)=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$

(2) $S(a)^2=T(a)$ とする　$T(a)$が最大となるaを求めればよい

$T'(a)=\frac{\{2(a-1)^2+2a\cdot2(a-1)\}(a^2+1)^2-2a(a-1)^2\cdot2(a^2+1)\cdot2a}{(a^2+1)^4}$

$=\frac{2(a-1)(a^2+1)\{(a-1)(a^2+1)+2a(a^2+1)-4a^2(a-1)\}}{(a^2+1)^4}=\frac{2(a-1)(a^2+1)(a^3+a-a^2-1+2a^3+2a-4a^3+4a^2)}{(a^2+1)^4}$

$=\frac{2(a-1)(a^2+1)(-a^3+3a^2+3a-1)}{(a^2+1)^4}=\frac{-2(a-1)(a^2+1)(a+1)(a^2-4a+1)}{(a^2+1)^4}$

$$\begin{array}{r}
a^2-4a+1 \\
a+1\,\overline{)\,a^3-3a^2-3a+1} \\
a^3+a^2 \\
\hline
-4a^2-3a \\
-4a^2-4a \\
\hline
a+1 \\
a+1 \\
\hline
0
\end{array}$$

$a^2-4a+1=0$ のとき　$a=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$

$0<a<1$ のとき　$T'(a)=0$ のとき $a=2-\sqrt{3}$

a	…	$2-\sqrt{3}$	…
$T'(a)$	+	0	−
$T(a)$	↗	極大	↘

$T(a)$の増減表は左表

よって求めるaは $2-\sqrt{3}$