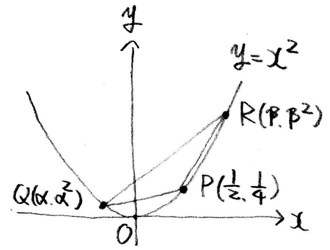
東大理科 2011前期 ④ （東大文科 2011前期 ④）



$X=\dfrac{\frac{1}{2}+\alpha+\beta}{3}$ —① $Y=\dfrac{\frac{1}{4}+\alpha^2+\beta^2}{3}$ —②

$\alpha<\frac{1}{2},\ \beta>\frac{1}{2}$ として考えてよい

直線QRの傾きは $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$

QRの中点をSとすると、Sの座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

直線QRに垂直でSを通る直線の方程式は $y-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

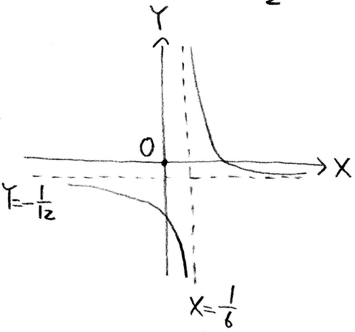
3点P, Q, RがQRを底辺とする二等辺三角形をなすとき これがPを通るから

$\dfrac{1}{4}-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $\dfrac{1}{4}(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+1$

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{1}{\alpha+\beta}-\dfrac{1}{2}$ —③

①より $\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}$、②より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}$

③より $3Y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3X-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}$ $\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)\left(3Y+\dfrac{1}{4}\right)=1$ $\left(X-\dfrac{1}{6}\right)\left(Y+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{9}$ —④

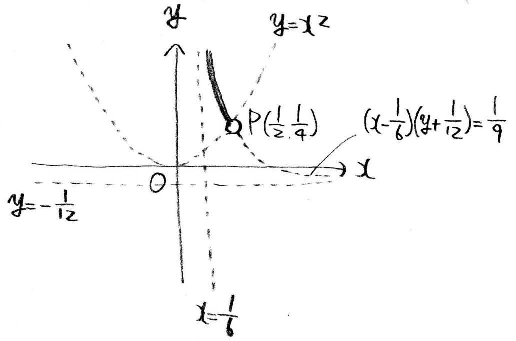


④は $XY=\frac{1}{9}$ をX方向に $\frac{1}{6}$ Y方向に $-\frac{1}{12}$ 平行移動させたものであるから

④のグラフは左図のようになる

ところでGは明らかに $y>x^2$ の領域にある

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{3-1}{6}\cdot\dfrac{3+1}{12}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ より ④はPを通る



以上よりGの軌跡は左図