東大理科 2011前期 ⑤ (東大文科 2011前期 ③は(2)まで)

(1) $w([a,b;c])=-q$ のとき $p-\cancel{q}-(a+b)=-\cancel{q}$ , $a+b=p$

$a\leqq p$ , $b\leqq 0$ より このとき $a=p$, $b=0$ . このとき $c=0,1,2\cdots p$ よって $p+1$ 個

$w([a,b;c])=p$ のとき $\cancel{p}-q-(a+b)=\cancel{p}$ $a+b=-q$

$a\geqq 0$. $b\geqq -q$ より このとき $a=0$. $b=-q$ このとき $c=-q,-q+1,-q+2\cdots 0$ よって $q+1$ 個

(2) $w([a,b;c])=-p+s$ のとき $p-p-(a+b)=-p+s$, $a+b=p-s$

$a+b$ の最大値は $a=p$, $b=0$ のとき $p$ , $a+b$ の最小値は $a=0$. $b=-p$ のとき $-p$

よって $-p\leqq p-s\leqq p$. $0\leqq s\leqq 2p$ のとき $w([a,b;c])=-p+s$ となる $(p,p)$ パターンが存在する.

(i) $0\leqq p-s\leqq p$ , $0\leqq s\leqq p$ のとき

$(a,b)=(p-s,0),(p-s+1,-1),(p-s+2,-2)\cdots(p-s+s,-s)$

すなわち $(a,b)=(p-s+k,-k)$ $(0\leqq k\leqq s)$ の場合がある

これらのときの $(p,p)$ パターンの数は $p-s+k-(-k)+1=2k+p-s+1$ 個

$(p,p)$ パターンの数は $\sum_{k=0}^{s}(2k+p-s+1)=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}s(s+1)+(p-s+1)(s+1)=(\cancel{s}+p-\cancel{s}+1)(s+1)=(p+1)(s+1)$ 個

(ii) $-p\leqq p-s<0$. $p<s\leqq 2p$ のとき

$(a,b)=(0,p-s),(1,p-s-1),(2,p-s-2)\cdots(2p-s,p-s-(2p-s))$

すなわち $(a,b)=(k,p-s-k)$ $(0\leqq k\leqq 2p-s)$ の場合がある

これらのときの $(p,p)$ パターンの数は $k-p+s+k+1=2k-p+s+1$ 個

$(p,p)$ パターンの数は $\sum_{k=0}^{2p-s}(2k-p+s+1)=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}(2p-s)(2p-s+1)+(-p+s+1)(2p-s+1)$

$=(2p-\cancel{s}-p+\cancel{s}+1)(2p-s+1)=(p+1)(2p-s+1)$ 個

以上より $0\leqq s\leqq p$ のとき $(p+1)(s+1)$ 個

$p<s\leqq 2p$ のとき $(p+1)(2p-s+1)$ 個

$s<0$. $s>2p$ のとき $0$ 個

(3) $a+b=-p,-p+1,-p+2\cdots p$ となる $(p,p)$ パターンの和を求めればよい.

これは(2)で $s=0,1,2\cdots 2p$ となる $(p,p)$ パターンの和と等しい

よって求める値は $\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)$

$=(p+1)\frac{1}{2}p(p+1)+(p+1)(p+1)+\sum_{s=1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)-\sum_{s=1}^{p}(p+1)(2p-s+1)$

$=\frac{1}{2}p^3+p^2+\frac{1}{2}p+p^2+2p+1+(p+1)(2p+1)2p-(p+1)\frac{1}{2}2p(2p+1)-(p+1)(2p+1)p+(p+1)\frac{1}{2}p(p+1)$

$=\frac{1}{2}p^3+2p^2+\frac{5}{2}p+1+4p^3+6p^2+2p-2p^3-3p^2-p-2p^3-3p^2-p+\frac{1}{2}p^3+p^2+\frac{1}{2}p$

$=p^3+3p^2+3p+1=(p+1)^3$