(1) $f(t)=x\left(t^2+\frac{y}{x}t+\frac{y^2}{4x^2}\right)-\frac{y^2}{4x}=x\left(t+\frac{y}{2x}\right)^2-\frac{y^2}{4x}$ より $f(t)$は $t=-\frac{y}{2x}$ のとき 最小値 $-\frac{y^2}{4x}$ をとる

(i) $y\geqq 0$ のとき

$f(t)$は $t=1$で最大値 $x+y$, $t=0$で最小値0 をとる. 求める値は $x+y$

(ii) $0\leqq -\frac{y}{2x}\leqq\frac{1}{2}$, $0\leqq -y\leqq x$, $-x\leqq y\leqq 0$ のとき

$f(t)$は $t=1$で最大値 $x+y$, $t=-\frac{y}{2x}$で最小値 $-\frac{y^2}{4x}$ をとる 求める値は $x+y+\frac{y^2}{4x}$

(iii) $\frac{1}{2}\leqq -\frac{y}{2x}\leqq 1$ $x\leqq -y\leqq 2x$, $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき

$f(t)$は $t=0$で最大値0. $t=-\frac{y}{2x}$で最小値 $-\frac{y^2}{4x}$をとる 求める値は $\frac{y^2}{4x}$

(iv) $-\frac{y}{2x}\geqq 1$ $-y\geqq 2x$ $y\leqq -2x$ のとき

$f(t)$は $t=0$で最大値0. $t=1$で最小値 $x+y$ をとる 求める値は $-x-y$

(2) (x,y)に対して xt^2+yt の $0\leqq t\leqq 1$の範囲における最大値と最小値の差が1以下であればよい

(i) $y\geqq 0$ のとき　(1)より $x+y\leqq 1$, $y\leqq -x+1$ であればよい

(ii) $-x\leqq y\leqq 0$のとき (1)より $x+y+\frac{y^2}{4x}\leqq 1$ $4x^2+4xy+y^2\leqq 4x$, $y^2+4xy+4x^2-4x\leqq 0$ —① であればよい

$y^2+4xy+4x^2-4x=0$ のとき $y=-2x\pm\sqrt{4x^2-4x^2+4x}$ より ①のとき $-2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x}$

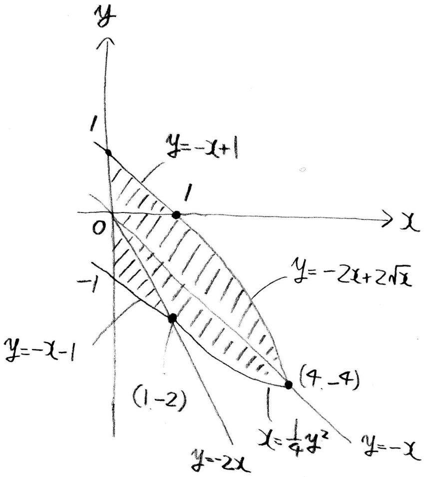
$-2x+2\sqrt{x}=0$ のとき $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0$, $x=0,1$　　$-2x+2\sqrt{x}=-x$ のとき $\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)=0$, $x=0,4$

(iii) $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき (1)より $\frac{y^2}{4x}\leqq 1$, $x\geqq\frac{1}{4}y^2$ であればよい

$\frac{1}{4}y^2=-y$ のとき $y(y+4)=0$, $y=-4,0$　　$\frac{1}{4}y^2=-\frac{1}{2}y$ のとき $y(y+2)=0$, $y=-2,0$

(iv) $y\leqq -2x$ のとき (1)より $-x-y\leqq 1$　$y\geqq -x-1$ であればよい

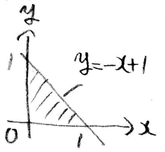
$-x-1=-2x$ のとき $x=1$



(i)〜(iv)より Sは左図の斜線部

※境界線上の点含む
ただしy軸上の点は含まない

(3) (i) $y \geqq 0$ のとき　(1),(2)より $y \geqq 0$ かつ $y \leqq -x+1$ の領域について考えればよい

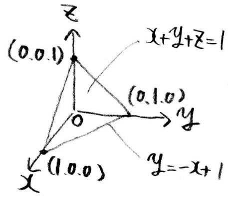


xt^2+yt の最小値は 0, 最大値は $x+y$

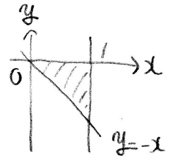
よって $0 \leqq z$ かつ $x+y+z \leqq 1$ であればよい

これは右図の三角錐であるから

この部分の体積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$



(ii) $-x \leqq y \leqq 0$ のとき　(1),(2)より $-x \leqq y \leqq 0$ の領域について考えればよい



xt^2+yt の最小値は $-\frac{y^2}{4x}$, 最大値は $x+y$

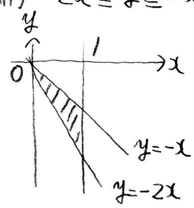
よって $0 \leqq -\frac{y^2}{4x}+z$ かつ $x+y+z \leqq 1$,　$z \geqq \frac{y^2}{4x}$ かつ $z \leqq -x-y+1$ であればよい

この領域のVの, 平面 $x=X$ での切り口の面積は

$$\int_{-X}^{0}\left(-X-y+1-\frac{y^2}{4X}\right)dy=\left[-\frac{1}{4X}\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+(-X+1)y\right]_{-X}^{0}=-\left(\frac{1}{12}X^2-\frac{1}{2}X^2+X^2-X\right)=-\frac{7}{12}X^2+X$$

この領域のVの体積は $\int_0^1\left(-\frac{7}{12}x^2+x\right)dx=\left[-\frac{7}{12}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{7}{36}+\frac{1}{2}=\frac{11}{36}$

(iii) $-2x \leqq y \leqq -x$ のとき　(1),(2)より $-2x \leqq y \leqq -x$ の領域について考えればよい



xt^2+yt の最小値は $-\frac{y^2}{4x}$　最大値は 0

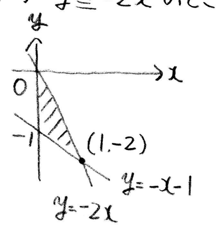
よって $0 \leqq -\frac{y^2}{4x}+z$ かつ $z \leqq 1$,　$z \geqq \frac{y^2}{4x}$ かつ $z \leqq 1$ であればよい

この領域のVの, 平面 $x=X$ での切り口の面積は

$$\int_{-2X}^{-X}\left(1-\frac{y^2}{4X}\right)dy=\left[-\frac{1}{4X}\frac{y^3}{3}+y\right]_{-2X}^{-X}=\frac{1}{12}X^2-X-\left(\frac{2}{3}X^2-2X\right)=-\frac{7}{12}X^2+X$$

この領域のVの体積は $\int_0^1\left(-\frac{7}{12}x^2+x\right)dx=\frac{11}{36}$

(iv) $y \leqq -2x$ のとき　(1),(2)より $y \leqq -2x$ かつ $y \geqq -x-1$ の領域について考えればよい



xt^2+yt の最小値は $x+y$, 最大値は 0

よって $0 \leqq x+y+z$ かつ $z \leqq 1$,　$z \geqq -x-y$ かつ $z \leqq 1$ であればよい

この領域のVの, 平面 $x=X$ での切り口の面積は

$$\int_{-X-1}^{-2X}(1+X+y)dy=\left[\frac{y^2}{2}+(X+1)y\right]_{-X-1}^{-2X}=\cancel{2X^2}-\cancel{2X^2}-2X-\left\{\frac{(-X-1)^2}{2}+(X+1)(-X-1)\right\}$$

$$=-2X+\frac{1}{2}(X+1)^2=\frac{1}{2}X^2-X+\frac{1}{2}$$

この領域のVの体積は $\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^1=\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$

(i)～(iv)より Vの体積は $\frac{6+11+11+6}{36}=\frac{17}{18}$