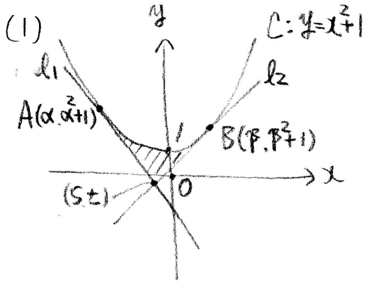
東大文科　2012前期　④

(1)



C上の点 (X, X^2+1) における接線の方程式は

$y-(X^2+1)=2X(x-X)$, $y=2Xx-2X^2+X^2+1$, $y=2Xx-X^2+1$

これが (s,t) を通るとき　$t=2sX-X^2+1$,　$X^2-2sX+t-1=0$　—①

$X=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

よって l_1, l_2 の方程式は　$y=2Xx-2sX+t\cancel{-1+1}$

$y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t$

(2) Cと l_1, l_2 の接点をA, Bとして これらの座標を (α, α^2+1), (β, β^2+1) ($\alpha<\beta$ としてよい) とすると.

①より $\alpha+\beta=2s$, $\alpha\beta=t-1$

Cと直線ABで囲まれる領域の面積は　$\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\dfrac{4}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$　—②

※ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4s^2-4t+4$, $\alpha<\beta$ より $\beta-\alpha=2\sqrt{s^2-t+1}$

点 (s,t) をPとすると $\overrightarrow{PA}=(\alpha-s, \alpha^2+1-t)$, $\overrightarrow{PB}=(\beta-s, \beta^2+1-t)$ より

$\triangle PAB$ の面積は　$\frac{1}{2}|(\alpha-s)(\beta^2+1-t)-(\alpha^2+1-t)(\beta-s)|=\frac{1}{2}|\alpha\beta^2+\alpha(1-t)-s\beta^2-\cancel{s(1-t)}-\alpha^2\beta+\alpha^2 s-(1-t)\beta+\cancel{s(1-t)}|$

$=\frac{1}{2}|\alpha\beta(\beta-\alpha)-s(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-(1-t)(\beta-\alpha)|=\sqrt{s^2-t+1}\,|t-1-2s^2-1+t|$

$=2\sqrt{s^2-t+1}\,|-s^2+t-1|=2(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$　—③

②③より. Cと l_1, l_2 で囲まれる領域の面積は　$\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=a$ のとき.　$s^2-t+1=\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$,　$t=s^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1$

よって、$-\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1\geqq 0$　$\frac{3a}{2}\leqq 1$　$0<a\leqq\frac{2}{3}$ のとき 条件を満たす (s,t) は存在しない

$a>\frac{2}{3}$ のとき 条件を満たす (s,t) は　$-\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1}$ かつ $t=s^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1$ を満たす点.