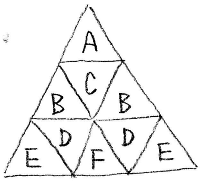
東大理科 2012前期 ②　(東大文科 2012前期 ③ も同じ問題)



左図のように、各部屋に文字を付ける

対称性より、同じ文字が付いている部屋は、球がある確率は等しい

球が n 秒後に部屋 A, B, C, D, E, F にある確率を $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ とする

$$\begin{cases} A_{n+1}=\frac{1}{3}C_n & \text{①} \\ B_{n+1}=\frac{2}{3}C_n+\frac{1}{3}D_n & \text{②} \\ C_{n+1}=A_n+\frac{1}{2}B_n & \text{③} \\ D_{n+1}=\frac{1}{2}B_n+E_n+F_n & \text{④} \\ E_{n+1}=\frac{1}{3}D_n & \text{⑤} \end{cases}$$

$$F_{n+1}=\frac{1}{3}D_n \quad \text{⑥}$$

④⑤⑥より $D_{n+2}=\frac{1}{2}B_{n+1}+\frac{1}{3}D_n+\frac{1}{3}D_n$

さらに②より $D_{n+2}=\frac{1}{3}C_n+\frac{1}{6}D_n+\frac{2}{3}D_n=\frac{1}{3}C_n+\frac{5}{6}D_n$ —④'

①②③より $C_{n+2}=\frac{1}{3}C_n+\frac{1}{3}C_n+\frac{1}{6}D_n=\frac{2}{3}C_n+\frac{1}{6}D_n$ —③'

③'④'より
$$\begin{aligned} D_{n+4}&=\frac{2}{9}C_n+\frac{1}{18}D_n+\frac{5}{6}D_{n+2} \\ &=\frac{2}{9}\left(3D_{n+2}-\frac{5}{2}D_n\right)+\frac{1}{18}D_n+\frac{5}{6}D_{n+2} \\ &=\frac{3}{2}D_{n+2}-\frac{1}{2}D_n \quad \text{⑦} \end{aligned}$$

$D_0=0$, $D_1=0$, $D_2=\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $D_3=0$

⑦より n が奇数のとき、$D_n=0$, m を0以上の整数として、$D_{2m}=d_m$ とすると、⑦より $d_{m+2}=\frac{3}{2}d_{m+1}-\frac{1}{2}d_m$ —⑦'

$d^2=\frac{3}{2}d-\frac{1}{2}$ のとき $2d^2-3d+1=0$ $(d-1)(2d-1)=0$ $d=\frac{1}{2}, 1$ より

⑦'より $\begin{cases} d_{m+2}-\frac{1}{2}d_{m+1}=d_{m+1}-\frac{1}{2}d_m \\ d_{m+2}-d_{m+1}=\frac{1}{2}(d_{m+1}-d_m) \end{cases}$

$d_{m+1}-\frac{1}{2}d_m=d_m-\frac{1}{2}d_{m-1}=\cdots=d_1-\frac{1}{2}d_0=D_2-\frac{1}{2}D_0=\frac{1}{3}$

$d_{m+1}-d_m=\frac{1}{2}\left(d_m-\frac{1}{2}d_{m-1}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(d_1-\frac{1}{2}d_0\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(D_2-\frac{1}{2}D_0\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^m$

よって $\frac{1}{2}d_m=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}$ $d_m=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}$, $D_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

ところで球が n 秒後に部屋Qにある確率を P_n とすると、$P_n=\frac{1}{2}D_n$ であるから、

$$P_n=\begin{cases} 0 & (n\text{が奇数のとき}) \\ \frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$