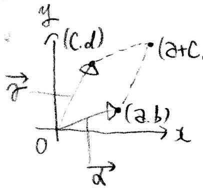
東大理科 2012前期 ⑤

(1) $\vec{\alpha}=(a,b)$ $\vec{\gamma}=(c,d)$ とすると $(a+c,b+d)=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ であるから、左図より 平面上の4点 $(0,0)$、(a,b)、$(a+c,b+d)$、(c,d) は
つねに、平行四辺形の4つの頂点をなす。



これの面積は $2\cdot\frac{1}{2}|ad-bc|$ よって $|ad-bc|=1$ —①

$BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$ a,b,c,d が整数のとき $a+c$, $b+d$ も整数

また $|(a+c)d-(b+d)c|=|ad+\cancel{cd}-bc-\cancel{cd}|=1$ よって行列 BA も条件(D)を満たす。

$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ より $B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\c&d\end{pmatrix}$

a,b,c,d が整数のとき、$a-c$, $b-d$ も整数

また $|(a-c)d-(b-d)c|=|ad-\cancel{cd}-bc+\cancel{cd}|=1$ よって行列 $B^{-1}A$ も条件(D)を満たす。

(2) $c=0$ より ①より $|ad|=1$. a,d は整数より $(a,d)=(1,1)(1,-1)(-1,1)(-1,-1)$ $A=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&b\\0&-1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ —② $B^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $B^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ …

$B^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ —③ $n=k$ のとき③が成り立つと仮定すると $B^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix}$ より $n=k+1$ のときも③が成り立つ —④

②より $n=1$ のとき③は成り立つから、これと④より数学的帰納法より③は成り立つ

$A=\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix}$ のとき $B^bA=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&b\\0&-1\end{pmatrix}$ のとき $B^bA=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&b\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ —⑤ $(B^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$ $(B^{-1})^3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$ …

$(B^{-1})^n=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$ —⑥ $n=k$ のとき⑥が成り立つと仮定すると $(B^{-1})^{k+1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-(k+1)\\0&1\end{pmatrix}$ より $n=k+1$ のときも⑥が成り立つ —⑦

⑤より $n=1$ のとき⑥は成り立つから、これと⑦より数学的帰納法より⑥は成り立つ

$A=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}$ のとき $(B^{-1})^bA=\begin{pmatrix}1&-b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$ のとき $(B^{-1})^bA=\begin{pmatrix}1&-b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

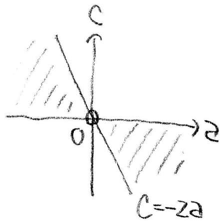
以上より、題意は示された

(3) $BA=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ のとき $x=a+c$, $z=c$ より $|x|+|z|<|a|+|c|$ は $|a+c|+|c|<|a|+|c|$

$\cancel{a^2}+2ac+c^2<\cancel{a^2}$, $(2a+c)c<0$ となる。

$c>0$ のとき、$2a+c<0$, $c<-2a$, $c<0$ のとき $2a+c>0$, $c>-2a$

よって、これを満たす (a,c) の範囲は左図の斜線部、境界線上の点を含まない —⑧

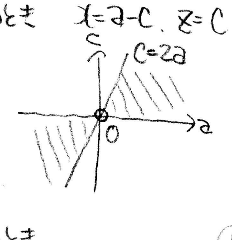


$B^{-1}A=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ のとき $x=a-c$, $z=c$ より $|x|+|z|<|a|+|c|$ は $|a-c|+|c|<|a|+|c|$

$a^2-2ac+c^2<a^2$ $(-2a+c)c<0$ となる。

$c>0$ のとき $-2a+c<0$, $c<2a$, $c<0$ のとき $-2a+c>0$ $c>2a$

よって、これを満たす (a,c) の範囲は左図の斜線部、境界線上の点を含まない —⑨



$|a|\geqq|c|>0$ のとき

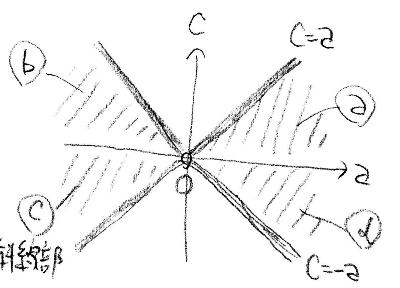
$a>0, c>0$ のとき $a\geqq c$ $c\leqq a$

$a>0, c<0$ のとき $a\geqq -c$ $c\geqq -a$

$a<0, c>0$ のとき $-a\geqq c$ $c\leqq -a$

$a<0$ $c<0$ のとき $-a\geqq -c$ $c\geqq a$

よって、これを満たす (a,c) の範囲は右図の斜線部
境界線上の点、太線部の点のみ含む



(a,c) が a または c 上にある点のとき、
これは⑨を満たす

(a,c) が b または d 上にある点のとき
これは⑧を満たす

以上より題意は示された.