東大理科　2012前期 ⑥

(1) $U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos t & -b\sin t\\ a\sin t & b\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos^2t+b\sin^2t & (a-b)\sin t\cos t\\(a-b)\sin t\cos t & a\sin^2t+b\cos^2t\end{pmatrix}$

$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix}a\cos^2t+b(\sin^2t-1) & (a-b)\sin t\cos t\\(a-b)\sin t\cos t & a(\sin^2t-1)+b\cos^2t\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix}\cos^2t & \sin t\cos t\\ \sin t\cos t & -\cos^2t\end{pmatrix}=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$

$U(x)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}U(-x)$ は $U(t)AU(-t)$ において $t=x,\ a=1,\ b=-1$ とすればよいから $\begin{pmatrix}\cos^2x-\sin^2x & 2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \sin^2x-\cos^2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2x & \sin2x\\ \sin2x & -\cos2x\end{pmatrix}$

$(U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}U(-x)=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2x & \sin2x\\ \sin2x & -\cos2x\end{pmatrix}$ より

$f(x)=(a-b)\cos t(\cos t\cos2x+\sin t\sin2x+\sin t\sin2x+\cos t\cos2x)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$

$-1\leqq\cos(2x-t)\leqq1$ より $m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2) $U(t)CU(-t)$ は $U(t)AU(-t)$ において $a=a^c,\ b=b^c$ とすればよいから

$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix}a^c\cos^2t+b^c\sin^2t & (a^c-b^c)\sin t\cos t\\(a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2t+b^c\cos^2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^{1-c} & 0\\ 0 & a^{1-c}\end{pmatrix}$ より

$\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)=a^cb^{1-c}\cos^2t+b\sin^2t+a\sin^2t+a^{1-c}b^c\cos^2t=(a+b)\sin^2t+(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2t$

$U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix}a\cos^2t+b(\sin^2t+1) & (a-b)\sin t\cos t\\(a-b)\sin t\cos t & a(\sin^2t+1)+b\cos^2t\end{pmatrix}$ より

$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)=a\cos^2t+b(\sin^2t+1)+a(\sin^2t+1)+b\cos^2t=(a+b)\cos^2t+(a+b)(\sin^2t+1)=2(a+b)$

よって与式は $2(a+b)\sin^2t+2(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2t-2(a+b)+2(a-b)|\cos t|\geqq0$

$2(a+b)(\sin^2t-1)+2(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2t+2(a-b)|\cos t|\geqq0$

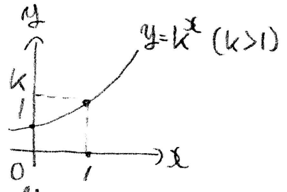
$-\cancel{2}(a+b)\cos^{\cancel{2}}t+\cancel{2}(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^{\cancel{2}}t+\cancel{2}(a-b)\cancel{|\cos t|}\geqq0$

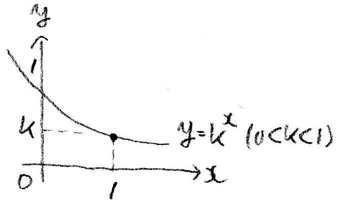
$\left[a\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^c-1\right\}+b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\right\}\right]|\cos t|+a-b\geqq0$ —① となる

(i) $a=b$ のとき

①の左辺は 0 となるから ①は成り立つ

(ii) $a>b$ のとき





$0<\frac{b}{a}<1$ より $\frac{b}{a}\leqq\left(\frac{b}{a}\right)^c\leqq1$　$\frac{b}{a}-1\leqq\left(\frac{b}{a}\right)^c-1\leqq0$　$b-a\leqq a\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^c-1\right\}\leqq0$

$\frac{a}{b}>1$ より $1\leqq\left(\frac{a}{b}\right)^c\leqq\frac{a}{b}$　$0\leqq\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\leqq\frac{a}{b}-1$　$0\leqq b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\right\}\leqq a-b$

よって $a\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^c-1\right\}+b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\right\}$ の最小値は $b-a$

$0\leqq|\cos t|\leqq1$ より $\left[a\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^c-1\right\}+b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\right\}\right]|\cos t|$ の最小値は $b-a$

よって ①の左辺の最小値は $b-a+a-b=0$ となるから ①は成り立つ

(i), (ii) より ①は成り立つ