

3  $a, b$  を正の実数とする．座標空間の 4 点  $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(a, 0, 0)$ ,  $R(0, 1, 0)$ ,  $S(0, 1, b)$  が半径 1 の同一球面上にあるとき,  $P, Q, R, S$  を頂点とする四面体に内接する球の半径を  $r$  とすれば, 次の二つの不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$