3　グラフ $G=(V,W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{P_1,\cdots,P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{E_1,\cdots,E_m\}$ からなる図形をする．各辺 E_j は丁度 2 つの頂点 P_{i_1}，P_{i_2} $(i_1\neq i_2)$ を持つ．頂点以外での辺同士の交わりは考えない．さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する．

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個 あり，辺 E_i $(i=1,\cdots,4)$ の頂点は P_i と P_5 である．P_1，P_2 は白頂点であり，P_3，P_4，P_5 は黒頂点である．

出発点とするグラフ G_1(図 2) は，$n=1$，$m=0$ であり，ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする．

与えられたグラフ $G=(V,W)$ から新しいグラフ $G'=(V',W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する．これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する．

(操作 1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする．E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．それ以外の頂点の色は変化させない．また P_{n+1} は白頂点にする (図 3).

(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1}，E_{m+2} を加えたものとする．E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり，E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする．G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．P_{i_2} についても同様に変化させる．それ以外の頂点の色は変化させない．また P_{n+1} は白頂点にする (図 4).

出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする．次の問いに答えよ．

(1)　図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ．ここで，すべての頂点の色は白である．

(2)　n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状グラフが可能グラフになるために n の満たすべき必要十分条件を求めよ．ここで，すべての頂点の色は白である．

図1

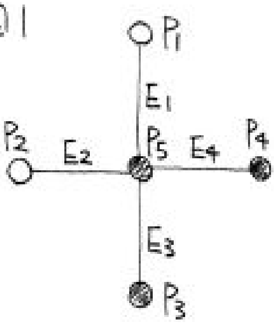

図2

図3

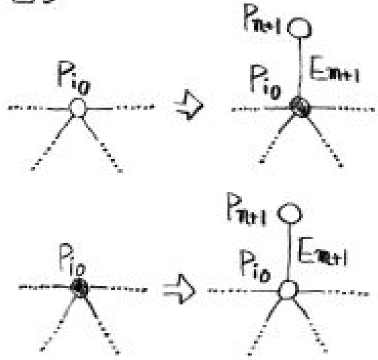

図4

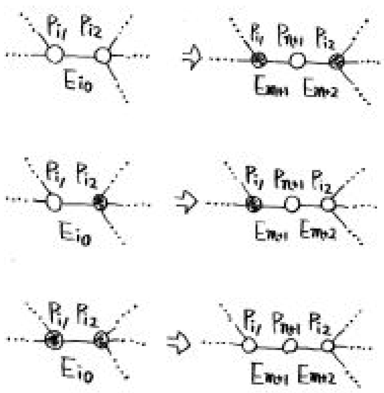

図5

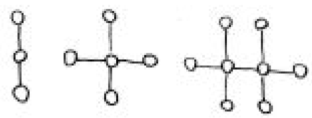

図6