1 k を正整数とし，x を変数とする k 次多項式 $P_k(x)$ について次の条件

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} P_k(x) - P_k(x-1) = x^{k-1} \\ P_k(0) = 0 \end{cases}$$

を考える．ただし，$x^0 = 1$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $k = 1, 2$ に対し，$P_k(x)$ を求めよ．

(2) すべての $k \geqq 3$ に対し，条件 (C) を満たす $P_k(x)$ が存在し，しかもただ一つであることを示せ．

(3) 正整数 k に対し，k 次の多項式 $Q_k(x)$ を次の条件が成立するように定める．

$$\begin{cases} Q_k(0) = Q_k(1) = \cdots = Q_k(k-1) = 0 \\ Q_k(k) = 1 \end{cases}$$

このとき，k 個の整数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ がそれぞれただ一つ存在して

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j Q_j(x)$$

と表されることを示せ．