

2 p, q, N, M を自然数とする．ただし \sqrt{p} は自然数ではないとする．このとき次の問に答えよ．

- (1) 自然数 l に対してある整数 A, B があって $(\sqrt{p} - [\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p} + B$ と表せることを示せ．ただし $[\sqrt{p}]$ は \sqrt{p} より小さい整数のうちで最大のものを表す．
- (2) xy 平面において， x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という．このとき，直線 $y = \sqrt{p}x$ との距離が $\frac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ．
- (3) 双曲線 $y^2 - px^2 = q$ の上の点 P と格子点 Q で，線分 PQ の長さが $\frac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ．
- (4) $p = 5, q = 2, M = 100$ として (3) の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ．すなわち，格子点 Q であって，双曲線 $y^2 - 5x^2 = 2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\frac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ．ただし $2.23606 < \sqrt{5} < 2.23607$ を用いてよい．