**2**　集合 $A$，$B$ を $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{0,1\}$ とし，$N$ を 3 以上の整数とする．また，各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする．

01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ に対し，$A$ から $B$ への写像 $f$ を用いて，新しい 01 数列 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ を，

$$b_1 = f(a_1), \quad b_2 = f(2a_1 + a_2), \quad b_k = f(4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k) \quad (k = 3, 4, \cdots, N)$$

と定め，$b_1, b_2, \cdots, b_N$ は $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から $f$ によって得られるという．ただし，$A$ から $B$ への写像 $f$ とは，$A$ の各要素 $x$ に対して $B$ の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする．

次の問に答えよ．

(1)　$A$ から $B$ への写像は，全部で何通りあるか．

(2)　$f(0)=f(3)=f(4)=f(7)=0$，$f(1)=f(2)=f(5)=f(6)=1$，であるとき，

$$b_k = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^k\} \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

となるような 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ を求めよ．

(3)　$A$ から $B$ への写像 $f$ が，条件

$$(P) \quad f(2m) \neq f(2m+1) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

を満たすとする．このような $f$ は何通りあるか．

(4)　$A$ から $B$ への写像 $f$ が条件 (P) を満たすならば，どのような $N$ 項からなる 01 数列も，ある 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から $f$ によって得られることを示せ．