

2 次の問に答えよ.

- (1) 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) に対し,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく. 行列 B は $B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r + t$, $rt - s^2$ を a, b, c を用いて表せ.

- (2) 前問 (1) において $r^2 + s^2 \geq a^2 + b^2$ が成り立つことを示せ.
(3) 実数 a_n, b_n, c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める.

$$n = 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

(ア) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ を示せ.

(イ) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ.