

2 実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す. 実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める.

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$
$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ.

(3) a が有理数であるとする. a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき, q 以上のすべての自然数 n に対して, $a_n = 0$ であることを示せ.