

4  $r$  を 0 以上の整数とし, 数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 素数  $p$  を 1 つとり,  $a_n$  を  $p$  で割った余りを  $b_n$  とする。ただし, 0 を  $p$  で割った余りは 0 とする。

- (1) 自然数  $n$  に対し,  $b_{n+2}$  は  $b_{n+1}(b_n + 1)$  を  $p$  で割った余りと一致することを示せ。
- (2)  $r = 2, p = 17$  の場合に, 10 以下のすべての自然数  $n$  に対して,  $b_n$  を求めよ。
- (3) ある 2 つの相異なる自然数  $n, m$  に対して,

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき,  $b_n = b_m$  が成り立つことを示せ。